MATHpines Prof. M.Díaz-Pinés	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. SELECTIVIDAD junio 2003 Metodología de Resolución UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

2. (Puntuación máxima : 3 puntos)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
(b) Calcular las asíntotas
(c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$

Metodoloía de Resolución

D) Datos

d1) Nos dan una función racional polinómica

Q) Cuestiones

q1) Estudio de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento
q2) Asíntotas
q3) Ecuación de la recta tangente a la curva representación en el punto origen $O(0, 0)$

T) Teoría y propiedades que relacionan D) y Q)

T1) El signo de la derivada primera $\dfrac{df}{dx}$ determina el crecimiento / decrecimiento

T2) Si en un punto de abscisa x_0 es $D(f)(x_0) < 0$ => la función decrece para ese valor : punto $A_0(x_o, f(x_0))$
Para el signo contrario, crece.

T3) Análogamente en un intervalo si esos signos son constantes en el mismo

T4) Una función racional polinómica $y = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ puede tener las siguientes asíntotas :

1) $x = x_v$ A.V. (asíntota vertical) si x_v es raíz exclusiva de $d(x) = 0$
2) $x = 0$ si el grado de $g(x)$ supera en más de un grado al de $f(x)$
3) Horizontal $y = y_1$ u oblicua $y = a\,x + b$ si al dividir $\dfrac{n(x)}{d(x)} = y_1 + \dfrac{r(x)}{d(x)}$ ó $\dfrac{f(x)}{dg(x)} = a\,x + b + \dfrac{r(x)}{d(x)}$
cuando el grado de $n(x)$ iguala o supera en una unidad al grado de $d(x)$

T5) La ecuación de la recta tangente a la curva de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$ es :

$y - f(x_0) = f\,'(x_0) \,.\, (x - x_0)$ o bien , en forma continua : $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - f(x_0)}{D(f)(x_0)}$

T6) Si el punto es el origen $O(0, 0)$: $y = f\,'(0) \,.\, x$, recta vectorial de pendiente $k = f\,'(0)$

P) PLANTEAMIENTO

P1) Hallamos $\dfrac{df}{dx}$ (es decir, $D(f)(x)$)

P2) Hallamos las raíces de $\frac{df}{dx} = 0$

P3) Esas raíces separan intervalos de signo constante de $\frac{df}{dx}$

P4) Estudiamos el signo en cada uno de esos intervalos y aplicamos el criterio expuesto antes

P5) Aplicamos el análisis anterior de los posibles tipos de asíntotas

P6) Hallamos la ecuación de la tangente en el origen con las fórmulas anteriores

<u>Resolución</u>

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1 - x^2} + 2\,\frac{x^2}{(1 - x^2)^2},\ \frac{df}{dx} = \frac{1 + x^2}{(-1 + x)^2\,(1 + x)^2}$$

La función derivada es estrictamente positiva en todo $\Re$, salvo en los valores x en que no está definida => es monótona creciente en todo $\Re - \{-1, 1\}$ porque

El dominio de la función es $\Re - \{-1, 1\}$ ya que la función denominador :

$$1 - x^2 = -(-1 + x)\,(1 + x)$$

tiene las raíces - 1 y 1

Precisamente $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la curva de la función
El grado del denominador supera en 2 al grado del numerador. Por esllo :

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{x}{1 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0$$

La función es impar y la gráfica es simétrica respecto al origen :

Además $\frac{df}{dx} \neq 0$ => no hay valores críticos : No hay extremos ni puntos de inflexión horizontal
Veamos si posee inflexiones :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 6\,\frac{x}{(1 - x^2)^2} + 8\,\frac{x^3}{(1 - x^2)^3},\ \frac{d^2 f}{dx^2} = -2\,\frac{x\,(3 + x^2)}{(-1 + x)^3\,(1 + x)^3}$$

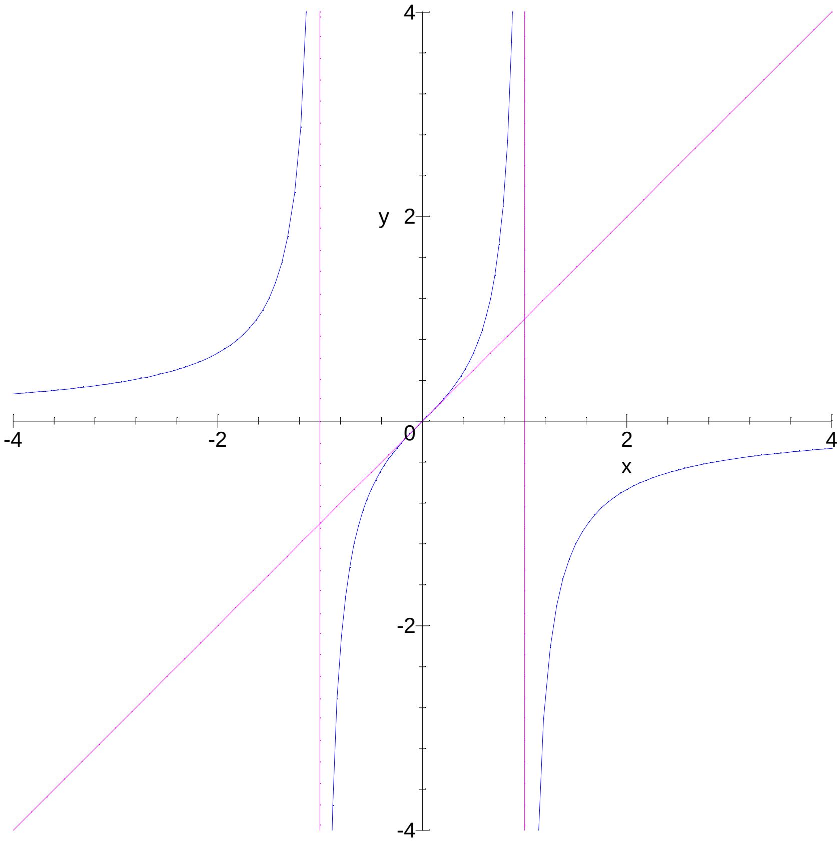
$$x = 0$$

Hay inflexión en $x = 0$

$$\mathrm{D}(f)(0) = 1$$

es oblicua , de pendiente 1

<u>Gráfica</u>



La recta tangente en el origen ha resultado ser la recta de inflexión :

$$y = x$$

Ampliación

Tiene especial interés en este problema estudiar los intervalos de concavidad/ convexidad

El único valor en que $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ es $x = 0$ por lo que podría pensarse que éste es el único valor que separa intervalos de curvatura constante en cuanto a concavidad / convexidad.

Pero no es así : también separan intervalos los valores $x = -1$ y $x = 1$ que representan A.V. simples y tales que la curva cambia de curvatura al pasar por esos valores : vid. la gráfica